*Задача*

*Знайти найбільше та найменше значення функції*

$$y=\frac{x^{2}+3x-1}{x^{2}-x+1}$$

Розв’язання

1. Знайдемо похідну функції. Для цього використаємо правило похідної частки:

(\*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\frac{1}{g^{2}\left(x\right)}\left(-f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)+g\left(x\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right)\right)$, де $f\left(x\right)=x^{2}+3x-1, g\left(x\right)=x^{2}-x+1$.

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{2}+3x-1\right)=2x+3.$$

$$\frac{d}{dx}g\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{2}-x+1\right)=2x-1.$$

Використовуючи правило (\*), отримаємо: $\frac{1}{\left(x^{2}-x+1\right)^{2}}\left(-\left(2x-1\right)\left(x^{2}+3x-1\right)+\left(2x+3\right)\left(x^{2}-x+1\right)\right)=\frac{-4x^{2}+4x+2}{x^{4}-2x^{3}+3x^{2}-2x+1}$ (1)

2. Прирівняємо похідну даної функції до нуля. Спростимо вираз (1): $-\frac{4x^{2}-4x-2}{\left(x^{2}-x+1\right)^{2}}=0.$ Знаменник завжди додатний, оскільки дискримінант рівняння $x^{2}-x+1=0$ буде від’ємним. Прирівняємо чисельник до нуля та знайдемо корені рівняння:

 $-4x^{2}+4x+2=0, D=4^{2}-4∙\left(-4\right)∙2=48 .$ $D>0⇒$ рівняння має два корені:

$$x\_{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2};x\_{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-екстремуми функції.$$

$$y\_{min}=y\left(x\_{1}\right)=1-\frac{4}{\sqrt{3}};y\_{max}=y\left(x\_{2}\right)=1+\frac{4}{\sqrt{3}}.$$